

Applications de la dérivation

n°57 p.150

Population de bactéries

On étudie la croissance d'une population de bactéries cultivées dans un milieu liquide, sur une période de deux heures.

L'évolution de la taille de cette population est modélisée par la fonction f définie sur $[0; 2]$ par :

$f(t) = -4,5t^3 + 13,5t^2 + 2$, dans laquelle t est exprimé en heures et $f(t)$ en millions de bactéries.

La dérivée de la fonction f représente la vitesse de croissance de la population.

On note $v(s)$ cette vitesse de croissance.

- Calculer $v(t)$ puis $v'(t)$.
 - Étudier les variations de la fonction v sur $[0; 2]$.
 - Décrire l'évolution de la population de bactéries.
-

n°56 p.150

Concentration d'un médicament

Un médicament antalgique est administré par voie orale.

La concentration du produit actif dans le sang est modélisée par une fonction f qui, au temps écoulé x en heures, associe la concentration $f(x)$ en milligrammes par litre de sang (mg/L).

La fonction f est définie sur l'intervalle $[0; 6]$ par :

$$f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x$$

- Calculer $f'(x)$.
 - Déterminer le signe de $f'(x)$ sur $[0; 6]$.
 - Étudier le sens de variation de f sur $[0; 6]$ et construire son tableau de variation.
 - L'affirmation " Au bout de 3 heures, il y a davantage de produit actif dans le sang qu'au bout de 2 heures. " est-elle vraie ? Justifier la réponse.
-

n°67 p.151

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{4x+7}{x^2+2}$

- Étudier le sens de variation de f sur l'intervalle $[-5; 1]$.
 - Quel est le minimum de f sur $[-5; 1]$? Pour quelle valeur est-il atteint ?
 - Quel est le maximum de f sur $[-5; 1]$? Pour quelle valeur est-il atteint ?
-

n°78 p.151

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$.

$\mathcal{C}$ est la courbe représentative de f dans un repère et T est la tangente à $\mathcal{C}$ en 1.

- Déterminer une équation de T .
- On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :
 $g(x) = f(x) - (4x - 4)$.
 - Étudier les variations de g .
 - Calculer $g(-3)$.
 - Dresser le tableau de variation de g .
 - Déterminer le signe de $g(x)$ en fonction de x .
- En déduire la position relative de T par rapport à $\mathcal{C}$

Correction

n°57 p.150

Population de bactéries

a. $v(t) = f'(t) = -13,5t^2 + 27t$

$v'(t) = -27t + 27$

b. $v'(t) = 0$

$-27t + 27 = 0$

$t = 1$

$v(0) = -13,5 \times 0^2 + 27 \times 0 = 0$

$v(1) = -13,5 \times 1^2 + 27 \times 1 = 13,5$

$v(2) = -13,5 \times 2^2 + 27 \times 2 = 0$

x	0	1	2
$v'(x)$	+	0	-
v	0	13.5	0

c. On a étudié la vitesse de croissance des bactéries.

Donc la population de bactéries croît sans cesse, de plus en plus rapidement entre 0 et 1 heure et de moins en moins rapidement entre 1 h et 2 h.

n°56 p.150

a. $f'(x) = 3x^2 - 24x + 36$

b. $f'(x) = 0$

$3x^2 - 24x + 36 = 0$ $a = 3$ $b = -24$ $c = 36$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-24)^2 - 4 \times 3 \times 36 = 144$

$$\begin{array}{l} x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_1 = \frac{24 + \sqrt{144}}{6} \\ x_1 = 6 \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \frac{24 - \sqrt{144}}{6} \\ x_2 = 2 \end{array} \right.$$

$f'(x)$ est positif sur l'intervalle $] -\infty; 2]$

$f'(x)$ est négatif sur l'intervalle $]2; 6]$

$f'(x)$ est positif sur l'intervalle $]6; +\infty]$

c.

x	0	2	6
$f'(x)$	+	0	-
f	0	32	0

d. L'affirmation est fausse. Sur l'intervalle $[2; 6]$ la fonction f est décroissante donc $f(2) > f(3)$

n°67 p.151

a. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{4x + 7}{x^2 + 2}$

$f(x)$ est du type $\frac{u(x)}{v(x)}$

avec $u(x) = 4x + 7$ $u'(x) = 4$
et $v(x) = x^2 + 2$ $v'(x) = 2x$

$f'(x) = \frac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{(v(x))^2}$

$f'(x) = \frac{4 \times (x^2 + 2) - 2x \times (4x + 7)}{(x^2 + 2)^2}$

$f'(x) = \frac{4x^2 + 8 - 8x^2 - 14x}{(x^2 + 2)^2}$

$f'(x) = \frac{-4x^2 - 14x + 8}{(x^2 + 2)^2}$

$(x^2 + 2)^2$ étant toujours positif, le signe de $f'(x)$ est celui de $-4x^2 - 14x + 8$.

Le discriminant du numérateur est $\Delta = (-14)^2 - 4 \times (-4) \times 8 = 324$

$\Delta > 0$ donc le numérateur s'annule en deux valeurs x_1 et x_2 , avec :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$x_1 = \frac{14 + \sqrt{324}}{-8}$$
$$x_1 = -4$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$x_2 = \frac{14 - \sqrt{324}}{-8}$$
$$x_2 = 0,5$$

$f(-5) = -\frac{13}{27}$
 $f(-4) = -0,5$
 $f(0,5) = 4$
 $f(1) = \frac{11}{3}$

x	-5	-4	0.5	1
$f'(x)$	-	0	0	-
f	$-\frac{13}{27}$	-0.5	4	$\frac{11}{3}$

- b. Le minimum de f sur $[-5; 1]$ est $-0,5$. Il est atteint pour $x = -4$
c. Le maximum de f sur $[-5; 1]$ est 4 . Il est atteint pour $x = 0,5$

n°78 p.151

1. $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ $f(1) = 0$

$f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$ $f'(1) = 4$

Équation de la tangente $(T) : y = f'(1)(x - 1) + f(1)$

$y = 4(x - 1) + 0 = 4x - 4$

2. $g(x) = f(x) - (4x - 4) = x^3 + x^2 - x - 1 - 4x + 4 = x^3 + x^2 - 5x + 3$

a. $g'(x) = 3x^2 + 2x - 5$

$g'(x)$ est un polynôme du second degré. Son discriminant est $\Delta = 2^2 - 4 \times (-5) = 64$

Comme $\Delta > 0$, $g'(x)$ a deux racines réelles distinctes.

$$\begin{array}{l|l} x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} & x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_1 = \frac{-2 + \sqrt{64}}{6} & x_2 = \frac{-2 - \sqrt{64}}{6} \\ x_1 = 1 & x_2 = -\frac{5}{3} \end{array}$$

$g(-3) = (-3)^3 + (-3)^2 - 5 \times (-3) + 3 = 0$

x	$-\infty$	-3	$-\frac{5}{3}$	1	$+\infty$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
g	$-\infty$		$\frac{256}{27}$		0	$+\infty$

Signe de $g(x)$ en fonction de x :

$g(x)$ est négatif sur l'intervalle $] - \infty; 3]$

$g(x)$ est positif sur l'intervalle $[3; +\infty[$

3.

Sur l'intervalle $] - \infty; 3[$, $g(x) < 0$ donc $f(x) - (4x - 4) < 0$.

On a donc $f(x) < 4x - 4$.

On peut en déduire que sur $] - \infty; 3]$, $\mathcal{C}$ est en dessous de T .

Sur l'intervalle $]3; +\infty[$, $g(x) > 0$ donc $f(x) - (4x - 4) > 0$.

On a donc $f(x) > 4x - 4$.

On peut en déduire que sur $] - \infty; 3]$, $\mathcal{C}$ est au dessus de T .

