

I Suites arithmétiques

Définition

Soit u une suite définie sur $\mathbb{N}$.

On dit que u est une suite arithmétique de raison r si et seulement si il existe un réel r tel que pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Exemple :

Soit u la suite arithmétique de raison 2 et de premier terme $u_0 = 7$.

Ainsi, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n + 2$.

$$u_1 = u_0 + 2 = 7 + 2 = 9$$

$$u_2 = u_1 + 2 = 9 + 2 = 11$$

$$u_3 = u_2 + 2 = 11 + 2 = 13$$

Formule explicite

Propriété

Soit u une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$, définie sur $\mathbb{N}$.

Alors pour tous entiers naturels n et p , on a :

$$u_n = u_p + (n - p) \times r$$

En particulier, si u est définie à partir du rang 0, on a :

$$u_n = u_0 + nr$$

Exemples :

1. Soit u la suite arithmétique de raison $r = 3$ définie sur $\mathbb{N}$ et telle que $u_{10} = 2$. Calculer u_{17} .

$$u_n = u_p + (n - p) \times r$$

$$u_{17} = u_{10} + (17 - 10) \times 3$$

$$u_{17} = 2 + 7 \times 3$$

$$u_{17} = 23$$

2. Soit u la suite arithmétique de raison $r = -4$ définie sur $\mathbb{N}$ et telle que $u_0 = 12$. Calculer u_{20} .

$$u_n = u_0 + nr$$

$$u_{20} = u_0 + 20 \times (-4)$$

$$u_{20} = 12 + 20 \times (-4)$$

$$u_{20} = -68$$

Méthode pour montrer qu'une suite est arithmétique

Propriété

Pour montrer qu'une suite u est arithmétique, on calcule, pour tout entier naturel n , la différence $u_{n+1} - u_n$ et on montre que cette différence est égal à un réel constant.

La suite u est alors arithmétique de raison ce réel.

Remarque

Ce n'est pas parce que l'on montre que $u_1 - u_0 = u_2 - u_1$ que l'on peut conclure que cela marche pour tout entier naturel n et que la suite est arithmétique !

Il faut effectuer le calcul pour tout n , donc avec la variable n .

Exemple :

Montrer que la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 3 - 5n$ est arithmétique et préciser sa raison et son premier terme.

$$u_n = 3 - 5n \text{ donc } u_{n+1} = 3 - 5(n+1) = 3 - 5n - 5 = -5n - 2$$

$$u_{n+1} - u_n = 3 - 5n - (-5n - 2) = 3 - 5n + 5n + 2 = 5$$

$$u_0 = 3 - 5 \times 0 = 3$$

Donc u est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison 5.

Sens de variation d'une suite arithmétique

Propriété

Soit u une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$, définie sur $\mathbb{N}$.

Si $r > 0$, alors la suite u est strictement croissante.

Si $r < 0$, alors la suite u est strictement décroissante.

Si $r = 0$, alors la suite u est constante.

Somme de termes

a) Somme des entiers de 1 à n

Propriété

Pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

On peut noter $1 + 2 + \dots + n = \sum_{i=1}^n i$

Exemple :

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + 100$$

$$S = \frac{100 \times 101}{2}$$

$$S = 5050$$

b) Somme des termes d'une suite arithmétique

Propriété

Soit S la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique :

$$S = \text{nombre de termes} \times \frac{1^{\text{er}} \text{ terme de la somme} + \text{dernier terme}}{2}$$

Propriété

u est une suite arithmétique.

$$S = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

$$S = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$$

Exemple :

Soit u la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 12$ et de raison 5.

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{20}$$

$$S = \sum_{i=0}^{20} u_i$$

$$u_{20} = u_0 + n \times r = 12 + 20 \times 5 = 112$$

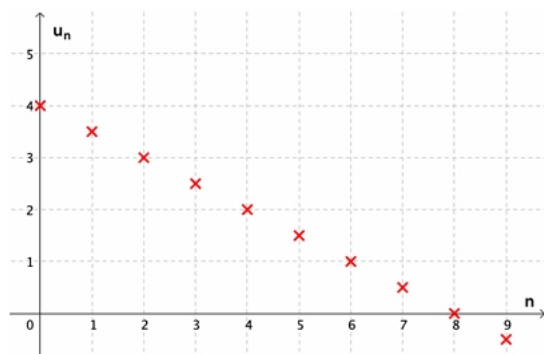
$$S = 21 \times \frac{12 + 112}{2}$$

$$S = 1302$$

Représentation graphique

Les points de la représentation graphique d'une suite arithmétique sont alignés.

Exemple : On a représenté ci-dessous la suite arithmétique de raison $-0,5$ et de premier terme 4.



II Suites géométriques

Définition

Soit u une suite définie sur $\mathbb{N}$. On dit que u est une suite géométrique de raison q si et seulement si il existe un réel q non nul tel que pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

Exemple :

Soit u la suite géométrique de raison 5 définie sur $\mathbb{N}$ et telle que $u_0 = 2$.

Alors pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 5 \times u_n$

$$u_1 = 5 \times u_0 = 5 \times 2 = 10$$

$$u_2 = 5 \times u_1 = 5 \times 10 = 50$$

$$u_3 = 5 \times u_2 = 5 \times 50 = 250$$

$$u_4 = 5 \times u_3 = 5 \times 250 = 1250$$

Formule explicite**Propriété**

Soit u une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$, définie sur $\mathbb{N}$.

Alors pour tous entiers naturels n et p , on a :

$$u_n = u_p \times q^{n-p}$$

En particulier, si u est définie à partir du rang 0, on a :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

Exemple :

Soit u la suite géométrique de telle que $u_4 = 12$ et de raison $q = 2$.

Déterminer u_{10} .

$$u_{10} = u_4 \times 2^{10-4}$$

$$u_{10} = 12 \times 2^6$$

$$u_{10} = 768$$

Méthode pour montrer qu'une suite est géométrique**Propriété**

Pour montrer qu'une suite u est géométrique, on exprime, pour tout entier naturel n , u_{n+1} en fonction de u_n en montrant qu'il existe un réel q tel que $u_{n+1} = q \times u_n$.

La suite u est alors géométrique de raison ce réel.

Exemple :

Soit u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \frac{2^n}{3}$

$$u_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{3} = \frac{2 \times 2^n}{3} = 2 \times u_n$$

On peut en conclure que u est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $u_0 = \frac{2^0}{3} = \frac{1}{3}$

Sens de variation d'une suite géométrique de raison strictement positive

Soit u une suite définie sur $\mathbb{N}$, géométrique de raison $q > 0$ et de premier terme u_0 .

Si $u_0 > 0$:

Si $q > 1$, alors u est strictement croissante.

Si $q = 1$, alors u est constante.

Si $0 < q < 1$, alors u est strictement décroissante.

Si $u_0 < 0$:

Si $q > 1$, alors u est strictement décroissante.

Si $q = 1$, alors u est constante.

Si $0 < q < 1$, alors u est strictement croissante.

Si $u_0 = 0$, alors la suite u est constante à zéro.

Somme de termes**a) Somme des puissances successives d'un réel****Propriété**

Soit q un réel différent de 1. Alors pour tout entier naturel n , on a :

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Exemple :

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{15} = \frac{1 - 2^{16}}{1 - 2} = 65\,535$$

b) Somme des termes d'une suite géométrique

Propriété

u est une suite géométrique.

$$S = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

$$S = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Exemple :

Soit u la suite géométrique de premier terme 0,2 et de raison 3

$$S = u_0 + u_1 + \dots + u_8 = 0,2 \times \frac{1-3^9}{1-3}$$

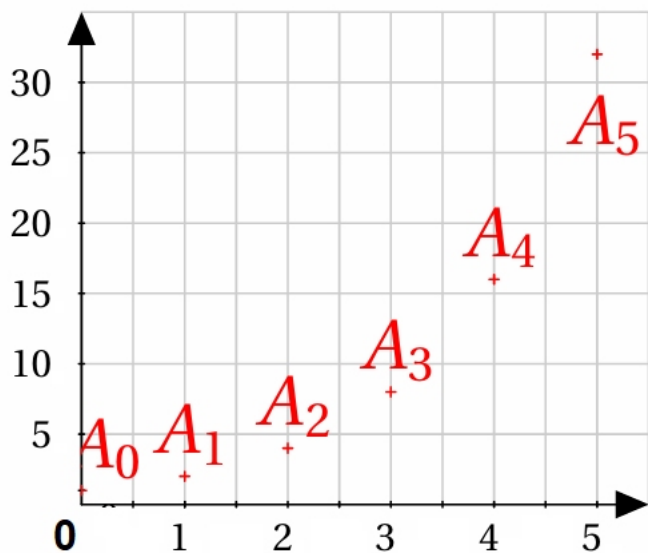
$$S = 1968,2$$

Représentation graphique

Soit la suite (u_n) définie par $u_n = 2^n$, pour tout entier naturel n .

On calcule les premiers termes de cette suite :

n	0	1	2	3	4	5
u_n	1	2	4	8	16	32



Sur le graphique ci-dessus, les points A_n correspondent à la suite (u_n) .

Une suite géométrique est représentée par des points qui suivent une évolution exponentielle.