Chapitre 5

Fonctions affines

I Définition et représentation graphique

Définition

Soient m et p sont deux réels donnés. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$ est appelée fonction affine, elle est représentée par une droite où :

- le réel m est le coefficient directeur de cette droite,
- le réel p est l'ordonnée à l'origine.

Remarque : Dans le cas où $p = 0$, la fonction est appelée fonction linéaire représentée par une droite passant par l'origine.

Exemple

Soit $f(x) = 5x - 12$.

f est une fonction affine avec $m = 5$ et $p = -12$

• Image de 20 par f : $f(20) = 5 \times 20 - 12 = 100 - 12 = 88$

• Antécédent de 20 par f :

On cherche la ou les valeurs de x tels que $f(x) = 20$

$f(x) = 20$

$5x - 12 = 20$

$5x = 20 + 12$

$5x = 32$

$x = \dfrac{32}{5}$

$x = 6{,}4$

Propriété

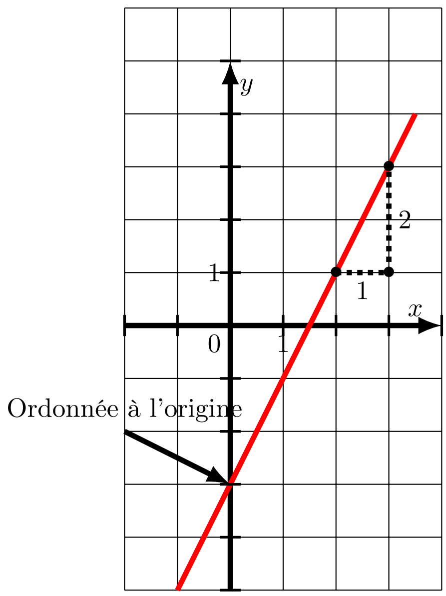
La représentation graphique d'une fonction affine est une droite

Exemple 1

Représentation graphique de la fonction f définie par $f(x) = 2x - 3$

L'ordonnée à l'origine est -3

Le coefficient directeur est 2. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{2}{1}$



II Déterminer une fonction affine

Propriété

Soit f une fonction affine définie par $f(x) = mx + p$, m et p étant deux réels fixés.

Pour tous réels $x_1 \neq x_2$, on a : $\quad m = \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$

Le coefficient m est le taux d'accroissement de f entre x_1 et x_2.

Exemple :

Soit f une fonction affine telle que :

$f(5) = 13$ et $f(-3) = -19$.

$m = \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$

$m = \dfrac{f(5) - f(-3)}{5 - (-3)}$

$m = \dfrac{13 - (-19)}{5 - (-3)}$

$m = \dfrac{32}{8}$

$m = 4$

On a donc $f(x) = 4x + p$. Il ne reste plus qu'à déterminer p.

$f(5) = 13$ donc :

$4 \times 5 + p = 13$

$20 + p = 13$

$p = 13 - 20$

$p = -7$

La fonction affine cherchée est donc la fonction définie par $f(x) = 4x - 7$

III Sens de variation d'une fonction affine

Propriété

Soit f une fonction affine définie par $f(x) = mx + p$, alors :

- Si $m > 0$, f est croissante sur $\mathbb{R}$,
- Si $m < 0$, f est décroissante sur $\mathbb{R}$,
- Si $m = 0$, f est constante sur $\mathbb{R}$.

Exemples :

- La fonction f définie par $f(x) = 3x + 2$ est croissante car $m = 3$ donc positif

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
f	$\nearrow$

- La fonction g définie par $g(x) = -2x + 3$ est décroissante car $m = -2$ donc négatif

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
g	$\searrow$

- La fonction h définie par $h(x) = 5$ est constante car $m = 0$.

IV Signes d'une fonction affine

Une fonction affine peut être croissante. Dans ce cas, elle est pour commencer négative puis positive.

Une fonction affine peut être décroissante. Dans ce cas, elle est pour commencer positive puis négative.

Avant de dresser un tableau de signes, il faut résoudre l'équation $f(x) = 0$.

Exemple 1

Dresser le tableau de signes de la fonction $f : x \longmapsto 5x - 8$

Commençons par résoudre $5x - 8 = 0$

$5x - 8 = 0$

$5x = 8$

$x = \dfrac{8}{5}$

$x = 1{,}6$

f est une fonction croissante (Le coefficient directeur est égal à 5 qui est positif).

x	$-\infty$		$1{,}6$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

Exemple 2

Dresser le tableau de signes de la fonction $g : x \longmapsto 8 - 2x$

Commençons par résoudre $8 - 2x = 0$

$8 - 2x = 0$

$-2x = -8$

$x = \dfrac{-8}{-2}$

$x = 4$

g est une fonction décroissante (Le coefficient directeur est égal à -2 qui est négatif).

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

Exemple 3 : Signes d'un produit

Dresser le tableau de signes de la fonction $h : x \longmapsto (3x + 21)(-6x + 3)$

Pour commencer, il faut résoudre les deux équations suivantes :

$3x + 21 = 0$

$3x = -21$

$x = \dfrac{-21}{3}$

$x = -7$

$-6x + 3 = 0$

$-6x = -3$

$x = \dfrac{-3}{-6}$

$x = 0{,}5$

x	$-\infty$		-7		$0{,}5$		$+\infty$
$3x + 21$		$-$	0	$+$		$+$	
$-6x + 3$		$+$		$+$	0	$-$	
signe de $h(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Exemple 4 : Signes d'un quotient

Dresser le tableau de signes de la fonction $k : x \longmapsto \dfrac{7x-5}{3x+1}$

Pour commencer, il faut résoudre les deux équations suivantes :

$7x - 5 = 0$

$7x = 5$

$x = \dfrac{5}{7}$

$3x + 1 = 0$

$3x = -1$

$x = \dfrac{-1}{3}$

$-\dfrac{1}{3}$ est une valeur interdite !!!

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		$\frac{5}{7}$		$+\infty$
$7x - 5$		$-$		$-$	0	$+$	
$3x + 1$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $k(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	